

Schnittelimination in einem Teilsystem der einfachen Typenlogik

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Wolfgang Bibel

1968

Inhalt

Einleitung	159
§ 1. Grundbegriffe	159
1. Formeln	159
2. n -isolierte Formeln.	160
3. Herleitungen	161
4. Die Ordinaltermssysteme T_0 und T_1	164
§ 2. Über Ordinalterme und Herleitungen.	166
1. Eigenschaften von Ordinaltermen	166
2. Eigenschaften von Herleitungen	168
§ 3. Beweis des Hauptsatzes.	170
Anhang	177
Literaturverzeichnis	177



Berichterstatter:

Prof. Dr. K. SCHÜTTE, Prof. Dr. H. GERICHKE

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 1968

SCHNITTELIMINATION IN EINEM TEILSYSTEM DER EINFACHEN TYPENLOGIK * **

Kurt Schütte zum 60. Geburtstag gewidmet von

WOLFGANG BIBEL

Einleitung

In [5] hat G. Takeuti den Gentzenschen Hauptsatz für sein System GLC der einfachen Typenlogik als Fundamentalvermutung konzipiert und diese in [6, 7, 8, 9, 11, 12] und [13] für bestimmte Teilklassen von Herleitungen in einer konstruktiven Weise bestätigt. In dieser Arbeit wird die Fundamentalvermutung in einem formalen System, das K. Schütte zuerst in [2] beschrieben hat, für eine weitere Klasse von Herleitungen, den sogenannten 2-isolierten Normalherleitungen, bewiesen. Diese ist eine Teilklassse der im Anhang angegebenen Klasse der n -isolierten Normalherleitungen, $n \geq 2$, welche die in [11] behandelte Klasse der proof-figures of order n umfaßt und sich im Gegensatz zu dieser in natürlicher Weise dazu eignet, das Ergebnis von [9] *stufenweise* zu verallgemeinern. Die Beschränkung auf $n = 2$ ermöglichte es, ein zum System 0(2) von Takeuti (siehe [10]) äquivalentes konstruktives Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen von Schütte (siehe [4]) zu verwenden, das auf Normalfunktionen beruht und so von der klassischen Ordinalzahltheorie her zu verstehen ist.

Ich möchte meinem verehrten Lehrer, Professor Schütte, für seine verständnisvolle und hilfreiche Betreuung herzlich danken.

§ 1. Grundbegriffe

1. Das formale System der einfachen Typenlogik, das hier zugrunde gelegt wird, wurde von K. Schütte in [2] formuliert. Bezüglich der Begriffe „Typen“, „Grundzeichen des formalen Systems“, „ n -stellige Nennformen“, „Ausdrücke vom Typ τ “, „Formeln“ und „Primformeln“ sei daher auf [2] 1.1.—1.4. verwiesen.

1.1. Induktive Definition der Quasiausdrücke.

1. Jeder Ausdruck vom Typ τ ist ein Quasiausdruck vom Typ τ .
2. Ist $\mathfrak{A}[a^\sigma]$ ein Quasiausdruck vom Typ τ , in dem die gebundene Variable x^σ nicht auftritt, so ist auch $\mathfrak{A}[x^\sigma]$ ein Quasiausdruck vom Typ τ .

Quasiausdrücke vom Typ 1 heißen *Quasiformeln*.

Mitteilungszeichen sind q^τ , r^τ , s^τ für Quasiausdrücke vom Typ τ und Q , R , S für Quasiformeln.

* Eingegangen am 25. 6. 1968.

** Diese Arbeit wurde als Dissertation der Universität München angenommen.

1.2. Induktive Definitionen der Positivteile einer Formel F .

1. F ist ein Positivteil von F .
 2. Ist $\neg\neg A$ ein Positivteil von F , so ist auch A ein Positivteil von F .
 3. Ist $(A \vee B)$ ein Positivteil von F , so sind auch A und B Positivteile von F .
- Minimalteile einer Formel F sind Positivteile von F , die außer sich selbst keinen Positivteil von F enthalten.

1.3. Unter einer n -stelligen Positivform versteht man eine n -stellige Nennform $\mathfrak{F}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Jedes der Nennzeichen $*_1, \dots, *_n$ tritt in $\mathfrak{F}$ an genau einer Stelle auf.
2. Für je n Formeln $A_1, \dots, A_n$ ist $\mathfrak{F}[A_1, \dots, A_n]$ eine Formel mit Positivteilen $A_1, \dots, A_n$.

Mitteilungszeichen sind $\mathfrak{P}$ für einstellige Positivformen und $\mathfrak{Q}$ für zweistellige Positivformen.

1.4. Induktive Definition von $\mathfrak{P}[\]$.

1. Ist $\mathfrak{P}$ die Nennform $*$, so sei $\mathfrak{P}[\]$ die leere Zeichenreihe.
2. Ist $\mathfrak{P}$ eine Nennform $\mathfrak{P}_0[\neg\neg*]$, so sei $\mathfrak{P}[\]$ identisch mit $\mathfrak{P}_0[\]$.
3. Ist $\mathfrak{P}$ eine Nennform $\mathfrak{P}_0[(\neg\neg* \vee A)]$ oder $\mathfrak{P}_0[(A \vee *)]$, so sei $\mathfrak{P}[\]$ die Formel $\mathfrak{P}_0[A]$.

2. In diesem Abschnitt wird der allgemeine Begriff der Formel eingeschränkt zum Begriff der n -isolierten Formel.

2.1. Induktive Definition des Grades gQ einer Quasiformel Q .

1. $gQ := 0$, wenn Q eine Quasiprimformel ist.
 2. $g(q_1^{r_1}, \dots, q_n^{r_n} \in \lambda x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \mathfrak{A}[x_1^{r_1}, \dots, x_n^{r_n}]) := g\mathfrak{A}[q_1^{r_1}, \dots, q_n^{r_n}] + 1$.
 3. $g(\neg R) := gR + 1$.
 4. $g(R_1 \vee R_2) := gR_1 + gR_2 + 1$.
 5. $g(\vee x^r \mathfrak{A}[x^r]) := g(\mathfrak{A}[a^r]) + 1$.
- Diese Definition ist induktiv bezüglich des sog. Ranges von Q ; vgl. hierzu [3] § 2 oder [2] § 2.

2.2. Induktive Definition der reduzierten Quasiformel Q^{red} einer Quasiformel Q (nach dem Grad von Q).

1. Ist Q Quasiprimformel, so sei $Q^{red} \equiv Q$.
 2. Ist $Q \equiv \neg Q_1$, so sei $Q^{red} \equiv \neg Q_1^{red}$.
 3. Ist $Q \equiv Q_1 \vee Q_2$, so sei $Q^{red} \equiv Q_1^{red} \vee Q_2^{red}$.
 4. Ist $Q \equiv \vee x^r Q_1$, so sei $Q^{red} \equiv \vee x^r Q_1^{red}$.
 5. Ist $Q \equiv (q_1^{r_1}, \dots, q_n^{r_n} \in \lambda x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \mathfrak{A}[x_1^{r_1}, \dots, x_n^{r_n}])$, so sei $Q^{red} \equiv (\mathfrak{A}[q_1^{r_1}, \dots, q_n^{r_n}])^{red}$.
- Q heißt reduziert, wenn $Q^{red} \equiv Q$ ist.

2.3. Induktive Definition der exponierten und des äußersten logischen Zeichens ($\neg$, $\vee$ oder $\vee$) in einer reduzierten Quasiformel Q .

1. Ist Q Quasiprimformel, so enthält Q kein exponiertes und kein äußerstes logisches Zeichen.

2. Hat Q die Gestalt $\neg R$, $R \vee S$, oder $\vee x^r R$, so ist jedes exponierte logische Zeichen von R (und von S) exponiert in Q . Außerdem ist auch das ange-

gebene Zeichen $\neg$, $\vee$ oder $\forall$ exponiert in Q . Dieses heißt äußerstes logisches Zeichen von Q .

Unter den Quantoren in einer Quasiformel unterscheiden wir *Objektquantoren*, *Aussagenquantoren* und *Prädikatenquantoren*, je nachdem die von dem Quantor gebundene Variable vom Typ $\tau = 0$, $\tau = 1$ oder $\tau \neq 0$ und $\tau \neq 1$ ist.

2.4. γ sei ein exponierter Aussagen- oder Prädikatenquantor in einer reduzierten Formel F . Wir sagen, γ *liegt positiv bzw. negativ in F* , wenn die Anzahl der Negationszeichen, in deren Bereich γ liegt, gerade bzw. ungerade ist.

2.5. γ , η seien Aussagen- oder Prädikatenquantoren in einer reduzierten Formel F . γ und η heißen *positiv bzw. negativ zueinander*, wenn sie gleiches bzw. verschiedenes Vorzeichen in F haben.

2.6. *Induktive Definition des Grades eines exponierten Aussagen- oder Prädikatenquantors γ in einer reduzierten Formel F .*

1. Liegen im Bereich von γ in F keine exponierten Aussagen- und Prädikatenquantoren, dann erhält γ den Grad 1.

2. Sei $n \geq 1$ der maximale Grad der exponierten Aussagen- und Prädikatenquantoren in F , die im Bereich von γ liegen. Steht γ positiv zu allen exponierten Aussagen- und Prädikatenquantoren, die im Bereich von γ liegen und in F den Grad n haben, so erhält auch γ den Grad n . Andernfalls erhält γ den Grad $n + 1$.

2.7. *Quantorengrad einer Formel F .* Enthält die reduzierte Formel F^{red} von F keine exponierten Aussagen- und Prädikatenquantoren, so erhält F den Quantorengrad 0; andernfalls heißt der maximale Grad der in F^{red} auftretenden exponierten Aussagen- und Prädikatenquantoren der Quantorengrad von F .

2.8. *n -isolierte Formeln.* n -isolierte Formeln seien Formeln mit einem Quantorengrad $\leq n$, für deren reduzierte Formeln F^{red} gilt:

1. Liegt ein exponierter Aussagen- oder Prädikatenquantor γ in F^{red} im Bereich eines zu γ negativen Prädikatenquantors η , dann liegt im Bereich von γ weder die von η gebundene Prädikatenvariable noch eine freie Prädikatenvariable.

2. Enthält F^{red} einen exponierten Aussagenquantor γ , dann liegen im Bereich von γ keine freie Prädikatenvariable und keine exponierten Aussagen- und Prädikatenquantoren, die negativ zu γ sind.

3. Mit dem Formelbegriff des ersten Abschnitts läßt sich nun durch Angabe von Axiomen und Schlußregeln ein formales System der einfachen Typenlogik angeben. Unter den Herleitungen in diesem System werden wir uns insbesondere mit sogenannten 2-isolierten Normalherleitungen beschäftigen. Neben diesen führen wir in diesem Abschnitt Begriffe ein, die im Zusammenhang mit dem Begriff der Herleitung stehen.

3.1. Logische Axiome:

(A1) Jede Formel der Gestalt $\mathcal{Q}[P, \neg P]$, wobei P eine Primformel ist.

(A2) Jede Formel der Gestalt $\mathcal{Q}[\vee x^\tau \mathcal{A}[x^\tau], \neg \vee x^\tau \mathcal{A}[x^\tau]]$ mit $\tau \neq 0$.

3.2. Grundschrßregeln:

(S 1) $\mathfrak{P}[\neg A], \mathfrak{P}[\neg B] \vdash \mathfrak{P}[\neg(A \vee B)]$.

(S 2) $\mathfrak{P}[\neg \mathfrak{A}[a^\tau]] \vdash \mathfrak{P}[\neg \vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]]$, falls die Konklusion eine Formel ist, der die sogenannte *Eigenvariable* a^τ dieses Schlusses nicht auftritt (*Variablenbedingung*).

(S 3) $\mathfrak{P}[\vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]] \vee \mathfrak{A}[e^\tau] \vdash \mathfrak{P}[\vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]]$.

(S 4) $\begin{cases} \mathfrak{P}[\mathfrak{A}[e_1^{\tau_1}, \dots, e_n^{\tau_n}]] \vdash \mathfrak{P}[(e_1^{\tau_1}, \dots, e_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}[x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}])] , \\ \mathfrak{P}[\neg \mathfrak{A}[e_1^{\tau_1}, \dots, e_n^{\tau_n}]] \vdash \mathfrak{P}[\neg (e_1^{\tau_1}, \dots, e_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}[x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}])] . \end{cases}$

Der Ausdruck e^τ in einem Schluß (S 3) heißt *Eigenausdruck* dieses Schlusses; ein Schluß (S 3) heißt *vom Typ τ* , wenn sein Eigenausdruck vom Typ τ ist.

Den genannten Positivteil in der Konklusion eines der obigen Schlüsse nennen wir *Hauptteil* des betreffenden Schlusses; er ist in jedem Falle Minimalteil.

3.3. Weitere Schlußregeln.

(S 5) *Schnittregel* $\mathfrak{P}_1[C], \mathfrak{P}_2[\neg C] \vdash \mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$.

Dabei soll zunächst auch der Fall zugelassen sein, daß die Konklusion die leere Zeichenreihe ist. Das Ergebnis dieser Arbeit zeigt jedoch, daß dieser Fall tatsächlich nicht auftreten kann.

Den Positivteil C bzw. $\neg C$ in den Prämissen nennen wir *linken* bzw. *rechten Schnittteil*, die Formel C selbst heißt *Schnittformel des Schnittes*.

(S 6) *Abschwächungsregel* $\mathfrak{P}[A] \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0[A]]$.

Ein Positivteil in $\mathfrak{P}_0[A]$, der fremd zu A ist, heißt *Abschwächungsteil*.

(S 7) *Kürzungsregel* $\mathfrak{Q}[A, A] \vdash \mathfrak{Q}[A,]$ für Minimalteile A .

(S 8) *Einsetzungsregel* $\mathfrak{F}[a^\tau] \vdash \mathfrak{F}[e^\tau]$ mit $\tau \neq 0$, $\tau \neq 1$, falls die *Eigenvariable* a^τ in $\mathfrak{F}$ nicht auftritt (*Variablenbedingung*). e^τ heißt *Eigenausdruck* des betreffenden Schlusses (S 8).

3.4. Eine *Normalherleitung* $\mathfrak{H}$ einer Formel E ist eine stammbaumförmige Figur von Formeln, in der die obersten Formeln Axiome sind und jede andere Formel F Konklusion eines der Schlüsse (S 1)–(S 8) ist, dessen Prämissen in $\mathfrak{H}$ über F stehen. Die *Länge von $\mathfrak{H}$* ist die maximale Länge ihrer Fäden.

Eine Normalherleitung, in der als Ausgangsformeln nur Axiome (A 1) und als Schlüsse nur Grundschlüsse und Schnitte auftreten, heißt *einfache Normalherleitung*.

Eine schnittfreie, einfache Normalherleitung heißt *Grundherleitung*.

Die Definition der Begriffe „Ausgangsformel einer Herleitung“, „Oberformel(n) einer Formel in einer Herleitung“, „Faden einer Herleitung“, „strukturgleiche Herleitungen“ und „Verträglichkeit einer Herleitung mit einer Zeichenreihe“ findet man in [1].

3.5. Ein Schluß $A \vdash B$ heiße *regulär*, wenn gilt: Jede Herleitung von A läßt sich in eine strukturgleiche Herleitung von B umformen.

3.6. Entsprechende Formelteile.

Die Schlüsse (S 1)–(S 8) haben die Gestalt:

(S 1) $\mathfrak{P}[H_1], \mathfrak{P}[H_2] \vdash \mathfrak{P}[H]$,

(S 2), (S 4) $\mathfrak{P}[H_1] \vdash \mathfrak{P}[H]$,

- (S 3) $\mathfrak{P}[H] \vee H_1 \vdash \mathfrak{P}[H],$
 (S 5) $\mathfrak{P}_1[C], \mathfrak{P}_2[\neg C] \vdash \mathfrak{P}_1[\] \vee \mathfrak{P}_2[\].$
 (S 6) $\mathfrak{P}[A] \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0[A]],$
 (S 7) $\mathfrak{Q}[A, A] \vdash \mathfrak{Q}[A, \], A \text{ Minimalteil},$
 (S 8) $\mathfrak{F}[a^\tau] \vdash \mathfrak{F}[e^\tau], \tau \neq 0, \tau \neq 1.$

Dabei ist die genannte Formel H in der Konklusion Minimalteil und H_1, H_2 stehen in bestimmten Beziehungen zu H .

Jedem Minimalteil M in der Konklusion eines dieser Schlüsse ordnen wir wie folgt *entsprechende* und *i.w.S.* (im weiteren Sinne) *entsprechende* Minimalteile der Prämissen zu.

1. $\mathfrak{P}[H]$ sei die Konklusion eines Schlusses (S 1), (S 2) oder (S 4) und M sei fremd zu H . Dann halte man M fest, während man in der Konklusion H durch H_i ($i = 1, 2$ oder $i = 1$) ersetzt. Der festgehaltene Minimalteil M in der Prämisse, die durch eine der angegebenen Ersetzungen aus der Konklusion entsteht, sei ein dem Minimalteil M in der Konklusion entsprechender Minimalteil.

2. $\mathfrak{P}[H]$ sei die Konklusion eines Schlusses (S 1), (S 2) oder (S 4) und es sei $M = H$. Dann sei jeder Minimalteil des Positivteils H_i ($i = 1, 2$ oder $i = 1$) der Prämisse ein dem Minimalteil M in der Konklusion i.w.S. entsprechender Minimalteil.

3. $\mathfrak{P}[H]$ sei die Konklusion eines Schlusses (S 3). Dann tritt $\mathfrak{P}[H]$ auch in der Prämisse auf. Derjenige Minimalteil, der im Prämissenteil an der entsprechenden Stelle wie M steht, heißt ein dem Minimalteil M in der Konklusion entsprechender Minimalteil.

Ist insbesondere $M = H$, dann sei überdies jeder Minimalteil in H_1 ein dem Minimalteil M in der Konklusion i.w.S. entsprechender Minimalteil.

4. Ist $\mathfrak{P}_1[\] \vee \mathfrak{P}_2[\]$ Konklusion eines Schlusses (S 5), dann ist M in $\mathfrak{P}_1[\]$ (bzw. in $\mathfrak{P}_2[\]$) enthalten. Man halte M fest und setze in $\mathfrak{P}_1[\]$ (bzw. $\mathfrak{P}_2[\]$) C (bzw. $\neg C$) so ein, daß bei dieser Einsetzung die Prämisse $\mathfrak{P}_1[C]$ (bzw. $\mathfrak{P}_2[\neg C]$) entsteht. Der festgehaltene Minimalteil sei dann der dem Minimalteil M in der Konklusion entsprechende Minimalteil.

5. $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0[A]]$ sei die Konklusion eines Schlusses (S 6). Ist M nicht in einem Abschwächungsteil enthalten, dann tritt der Minimalteil M an entsprechender Stelle auch in der Prämisse auf; dieser sei der dem Minimalteil M in der Konklusion entsprechende Minimalteil. (Zu Abschwächungsteilen gebe es keine entsprechenden Teile.)

6. $\mathfrak{Q}[A, \]$ sei die Konklusion eines Schlusses (S 7).

Ist M fremd zu A , dann halte man M fest und setze A in die Konklusion so ein, daß hierbei die Prämisse entsteht. Der festgehaltene Minimalteil sei ein dem Minimalteil M in der Konklusion entsprechender Minimalteil.

Ist $M = A$, dann seien beide Kürzungsformeln A in der Prämisse dem Konklusionsteil M entsprechende Minimalteile.

7. $\mathfrak{F}[e^\tau]$ sei die Konklusion eines Schlusses (S 8). Dann ist M von der Gestalt $\mathfrak{Q}[e^\tau]$. Man markiere M und ersetze e^τ an den genannten Stellen in $\mathfrak{F}[e^\tau]$ durch

die Eigenvariable a^r . Der markierte Minimalteil $\mathfrak{A}[a^r]$ in der Prämisse, die hierbei entsteht, sei der dem Konklusionsteil M entsprechende Minimalteil.

3.7. *Induktive Definition des kleinen (bzw. großen) Formelbundes $\mathfrak{f}$ eines Positivteiles A in der Endformel oder in einem Schnittteil eines Schnittes einer Normalherleitung $\mathfrak{S}$.*

1. Jeder Minimalteil von A soll zu $\mathfrak{f}$ gehören.

2. Gehört ein Minimalteil M in einer Formel F von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{f}$, so sollen auch die M entsprechenden (bzw. entsprechenden und i.w.S. entsprechenden) Minimalteile in den Oberformeln von F zu $\mathfrak{f}$ gehören.

3.8. Einen Formelbund eines Positivteiles in der Endformel nennen wir *explizit*, einen solchen eines Positivteiles in dem Schnittteil eines Schnittes *implizit*.

Einen Minimalteil A in einer Formel einer Normalherleitung nennen wir *explizit* bzw. *implizit*, falls A einem expliziten bzw. impliziten großen Formelbund angehört.

Ein Grundschiuß heißt *explizit* bzw. *implizit*, wenn sein Hauptteil *explizit* bzw. *implizit* ist.

3.9. *Induktive Definition des Endstücks einer Normalherleitung $\mathfrak{S}$.*

1. Die Endformel von $\mathfrak{S}$ gehört zum Endstück.

2. Gehört die Konklusion F eines Schlusses $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{S}$ zum Endstück und ist $\mathfrak{I}$ kein impliziter Grundschiuß, so gehört auch jede Oberformel von F zum Endstück.

Ein Schluß gehöre genau dann zum Endstück, wenn seine Konklusion im Endstück liegt.

Wir sagen darüber hinaus, ein Schluß $\mathfrak{I}$ liegt auf der Grenze des Endstücks, wenn die Konklusion, jedoch nicht die Prämisse(n) von $\mathfrak{I}$ zum Endstück gehören. ($\mathfrak{I}$ ist dann ein impliziter Grundschiuß.)

Einen Schnitt im Endstück, dessen beide Schnitteile Minimalteile sind, nennen wir *passend*, wenn die Formelbünde seiner Schnitteile beide den Hauptteil eines Grundschlusses auf der Grenze des Endstückes enthalten.

3.10. Eine Normalherleitung $\mathfrak{S}$ heißt *2-isoliert*, wenn gilt:

1. Der Hauptteil eines impliziten Schlusses (S 3) vom Typ $\tau \neq 0$ in $\mathfrak{S}$ ist eine 2-isolierte Formel.

2. Sei $\mathfrak{I}$ ein beliebiger Schluß (S 8) in $\mathfrak{S}$ und M ein beliebiger impliziter Minimalteil in der Prämisse von $\mathfrak{I}$. Ist M eine 2-isolierte Formel und enthält deren reduzierte Formel M^{red} einen exponierten Prädikatenquantor, in dessen Bereich eine freie Prädikatenvariable liegt, oder einen exponierten Prädikatenquantor 2. Grades, dann ist dieser Quantor negativ in M^{red} .

4. Hier führen wir die Systeme T_0 und T_1 von Ordinaltermen nach [4] ein und ordnen jeder Formel einer 2-isolierten Normalherleitung einen Term aus T_0 zu.

4.1. *Induktive Definition der Termsysteme T_0 und T_1 .*

1. $0 \in T_0$.

2. Ist $A \in T_0 \cup T_1$ und $\alpha \in T_0$, so ist $\varphi A \alpha \in T_0$.

3. Ist $A \in T_0 \cup T_1$ und n eine natürliche Zahl, so ist $\psi_n A \in T_1$.

4. Sind α und β Terme aus T_0 , so ist $\alpha \# \beta \in T_0$.

5. Sind A und B Terme aus $T_0 \cup T_1$, von denen mindestens einer zu T_1 gehört, so ist $A \# B \in T_1$.

4.2. Die Terme der Gestalt $\varphi A \alpha$ und $\psi_n A$ heißen *Hauptterme*. Die *Komponenten* eines Terms $A \neq 0$ sind diejenigen Hauptterme, aus denen sich A mittels $\#$ zusammensetzt.

Die Operation $\#$ wird kommutativ und assoziativ verwendet und es sei $A \# 0 = A$ für $A \in T_0 \cup T_1$. Diejenigen Ordinalterme, die auf Grund dieser Eigenschaften einander gleich sind, werden miteinander identifiziert.

4.3. *Induktive Definition der Koeffizientenmenge* $KA \subset T_0$ von $A \in T_0 \cup T_1$.

1. $K0 = \emptyset$.

2. $K(\varphi A \alpha) = \{\varphi A \alpha\}$.

3. $K(\psi_n A) = KA$.

4. $K(A \# B) = KA \cup KB$.

4.4. *Induktive Definition der Relation* $<$ auf $T_0 \cup T_1$.

Bezeichnungen für $\alpha \in T_0$ und $M \subset T_0$:

$M < \alpha$ bedeute: Für alle $\xi \in M$ ist $\xi < \alpha$;

$\alpha \leq M$ bedeute: Es gibt $\xi \in M$ mit $\alpha \leq \xi$.

1. $0 < A$ für $A \neq 0$.

2. $A < B, KA \cup \{\alpha\} < \varphi B \beta \rightarrow \varphi A \alpha < \varphi B \beta$.

Die Prämissen werden wir mit $\varphi A \alpha < \varphi B \beta$ abkürzen, also $\varphi A \alpha < \varphi B \beta$ bedeute: $A < B$ und $KA \cup \{\alpha\} < \varphi B \beta$.

3. $\alpha < \beta \rightarrow \varphi A \alpha < \varphi A \beta$.

4. $\varphi A \alpha \leq KB \cup \{\beta\} \rightarrow \varphi A \alpha < \varphi B \beta$.

5. $\varphi A \alpha < \psi_n B$.

6. $m < n, A < \psi_n B \rightarrow \psi_m A < \psi_n B$.

7. $A < B \rightarrow \psi_m A < \psi_m B$.

8. $\psi_m A \leq B \rightarrow \psi_m A < \psi_n B$.

9. Seien $A_1, \dots, A_k$ bzw. $B_1, \dots, B_m$ die Komponenten von A bzw. B ($k > 1$ oder $m > 1$). Dann gelte $A < B$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

9.1. Es gibt B_l ($1 \leq l \leq m$), so daß für alle h ($1 \leq h \leq k$) $A_h < B_l$ gilt.

9.2. $k = 1, m > 1$ und $A_1 = B_l$ für ein l mit ($1 \leq l \leq m$).

9.3. $k > 1, m > 1$ und es gibt ein A_h ($1 \leq h \leq k$) und ein B_l ($1 \leq l \leq m$) mit $A_h = B_l$ und $A_1 \# \dots \# A_{h-1} \# A_{h+1} \# \dots \# A_k < B_1 \# \dots \# B_{l-1} \# B_{l+1} \# \dots \# B_m$.

4.5. Es gilt der entscheidende Satz: Die Systeme T_0 und $T_0 \cup T_1$ sind bezüglich der Relation $<$ wohlgeordnet.

Diese Tatsache wird in [4] aus der Wohlordnung des Systems 0(2) der Ordinaldiagramme von Takeuti erschlossen.

4.6. *Induktive Definition der Ordnung einer Formel* F in einer 2-isolierten Normalherleitung $\mathfrak{H}$.

1. Ist F Ausgangsformel in $\mathfrak{S}$, so sei $\varphi 00$ die Ordnung von F .
2. Ist F Konklusion eines Schlusses (S 6) oder (S 7) mit der Prämisse F_0 , so sei die Ordnung von F gleich der Ordnung von F_0 .
3. Ist F Konklusion eines Schlusses (S 1) und ist $\varphi A_1 \alpha_1$ bzw. $\varphi A_2 \alpha_2$ die Ordnung der Prämisse F_1 bzw. F_2 , so sei $\varphi(\varphi_0(A_1 \# A_2))(\alpha_1 \# \alpha_2)$ die Ordnung von F .
4. Ist F Konklusion eines Schlusses (S 2), (S 4), (S 3) vom Typ $\tau = 0$ oder eines expliziten Schlusses (S 3), und ist $\varphi A_1 \alpha_1$ die Ordnung der Prämisse F_1 , so sei $\varphi(\varphi_0 A_1) \alpha_1$ die Ordnung von F .
5. Ist F Konklusion eines impliziten Schlusses (S 3) vom Typ $\tau \neq 0$ der Gestalt $\mathfrak{P}[H] \vee H_1 \vdash \mathfrak{P}[H]$ und ist $\varphi A_1 \alpha_1$ die Ordnung der Prämisse, so sei $\varphi(\varphi_{a+1} A_1) \alpha_1$ die Ordnung von F , wobei a den Grad von H_1 bezeichnet.
6. Ist F Konklusion eines Schnittes (S 5), dessen Schnittformel den Grad a habe, und ist $\varphi A_1 \alpha_1$ bzw. $\varphi A_2 \alpha_2$ die Ordnung der Prämisse F_1 bzw. F_2 , so sei $\varphi(\varphi_a(A_1 \# A_2))(\alpha_1 \# \alpha_2)$ die Ordnung von F .
7. Ist F Konklusion eines Schlusses (S 8), und ist $\varphi A \alpha$ die Ordnung der Prämisse, so sei $\varphi(\varphi A \alpha)(\varphi A \alpha)$ die Ordnung von F .

Die Ordnung der Endformel von $\mathfrak{S}$ heißt auch *Ordnung von $\mathfrak{S}$* .

4.7. Induktive Definition von $\overline{T}_0 < T_0$.

1. $\varphi 00 \in \overline{T}_0$.
2. $\varphi A_1 \alpha_1 \in \overline{T}_0, \varphi A_2 \alpha_2 \in \overline{T}_0 \rightarrow \varphi(\varphi_n(A_1 \# A_2))(\alpha_1 \# \alpha_2) \in \overline{T}_0$.
3. $\varphi A \alpha \in \overline{T}_0 \rightarrow \varphi(\varphi A \alpha)(\varphi A \alpha) \in \overline{T}_0$.

Aus 1. und 2. folgt: $\varphi A \alpha \in \overline{T}_0 \rightarrow \varphi(\varphi_n A) \alpha \in \overline{T}_0$. Also ist offensichtlich die Ordnung einer Formel in einer 2-isolierten Normalherleitung ein Ordinalterm aus $\overline{T}_0$.

4.8. Induktive Definition der Relation $\sqsubset$ für Terme aus $\overline{T}_0$.

1. $\varphi A \alpha \sqsubset \varphi A \alpha$.
2. $\varphi A \alpha \sqsubset \varphi B_i \beta_i$ ($i = 1$ oder $i = 2$) $\rightarrow \varphi A \alpha \sqsubset \varphi(\varphi_n(B_1 \# B_2))(\beta_1 \# \beta_2)$.
3. $\varphi A \alpha \sqsubset \varphi B \beta \rightarrow \varphi A \alpha \sqsubset \varphi(\varphi B \beta)(\varphi B \beta)$.

4.9. Induktive Definition der Ersetzungsrelation

$\varphi B_1 \beta_1 \left(\begin{smallmatrix} \varphi A_1 \alpha_1 \\ \varphi A_2 \alpha_2 \end{smallmatrix} \right) \varphi B_2 \beta_2$ für Terme $\varphi A_i \alpha_i, \varphi B_i \beta_i \in \overline{T}_0$, für $i = 1, 2$.

1. Es gilt $\varphi A_1 \alpha_1 \left(\begin{smallmatrix} \varphi A_1 \alpha_1 \\ \varphi A_2 \alpha_2 \end{smallmatrix} \right) \varphi A_2 \alpha_2$.

2. Gilt $\varphi B_1 \beta_1 \left(\begin{smallmatrix} \varphi A_1 \alpha_1 \\ \varphi A_2 \alpha_2 \end{smallmatrix} \right) \varphi B_2 \beta_2$, so gelte auch

$\varphi(\varphi_n(B_1 \# C))(\beta_1 \# \gamma) \left(\begin{smallmatrix} \varphi A_1 \alpha_1 \\ \varphi A_2 \alpha_2 \end{smallmatrix} \right) \varphi(\varphi_n(B_2 \# C))(\beta_2 \# \gamma)$ und

$\varphi(\varphi B_1 \beta_1)(\varphi B_1 \beta_1) \left(\begin{smallmatrix} \varphi A_1 \alpha_1 \\ \varphi A_2 \alpha_2 \end{smallmatrix} \right) \varphi(\varphi B_2 \beta_2)(\varphi B_2 \beta_2)$, wobei $\varphi C \gamma \in \overline{T}_0$ ist.

§ 2. Über Ordinalterme und Herleitungen

1. Zunächst werden hier einige Eigenschaften über Ordinalterme zusammengestellt.

1.1. Satz. Für $\varphi 00 \neq \varphi A \alpha$ gilt $\varphi 00 < \varphi A \alpha$.

Der Beweis ergibt sich induktiv.

1.2. Satz. Für $A \in T_0 \cup T_1$ gilt $A < \psi_a A$.

Der Beweis ergibt sich induktiv.

1.3. Satz. Ist $a < b$, so gilt $\psi_a A < \psi_b A$ für $A \in T_0 \cup T_1$.

Dies folgt aus 1.2. und § 1.4.4.6. .

1.4. Satz. Ist $\alpha \in T_0$, so gilt $\alpha < \varphi A \alpha$.

Der Beweis ergibt sich induktiv.

1.5. Satz. Ist $\varphi A \alpha \in \bar{T}_0$, so ist KA gleich der Komponentenmenge von α .

(Für $\alpha = 0$ ist insbesondere $KA = \emptyset$.)

Der Beweis ergibt sich induktiv.

1.6. Folgerung. $\varphi A \alpha \in \bar{T}_0 \rightarrow KA < \varphi A \alpha$.

Dies folgt aus 1.5. und 1.4.

1.7. Satz. Sei $\varphi A_i \alpha_i \in \bar{T}_0$, $i = 1, 2$, und $\alpha := \varphi(\psi_a(A_1 \# A_2))(\alpha_1 \# \alpha_2)$.

Dann gilt $\varphi A_i \alpha_i < \alpha$, also insbesondere $\varphi A_i \alpha_i < \alpha$, $i = 1, 2$.

Dies folgt mit 1.2., 1.4. und 1.6.

1.8. Satz. Es sei $\varphi A \alpha \in \bar{T}_0$, $\varphi B \beta \in \bar{T}_0$, $a_i < a$, $B_i \leq B$, $KB_i \cup \{\beta_i\} < \varphi B \beta$ für $i = 1, 2$. Dann gilt $\varphi(\psi_a(\psi_{a_2}(A \# B_1) \# B_2))(\alpha \# \beta_1 \# \beta_2) < \varphi(\psi_a(A \# B))(\alpha \# \beta)$.

Dies folgt mit 1.2., 1.6. und 1.7.

1.9. Satz. Sei $\varphi A_i \alpha_i \in \bar{T}_0$, $\varphi A'_i \alpha'_i < \varphi A_i \alpha_i$, $i = 1, 2$,

$\alpha := \varphi(\psi_a(A_1 \# A_2))(\alpha_1 \# \alpha_2)$ und $a' < a$. Dann gilt

$\varphi(\psi_{a'}(\psi_a(A'_1 \# A'_2) \# \psi_a(A_1 \# A_2))) (\alpha'_1 \# \alpha'_2 \# \alpha_1 \# \alpha_2) < \alpha$.

Dies folgt mit 1.4., 1.6. und 1.7.

1.10. Satz. Es sei $\varphi A_i \alpha_i \in \bar{T}_0$ und $\varphi A'_i \alpha'_i < \varphi A_i \alpha_i$, für $i = 1, 2$. Dann gilt

$\varphi(\psi_a(A'_1 \# A'_2)) (\alpha'_1 \# \alpha'_2) < \varphi(\psi_{a+1}(A_1 \# A_2)) (\alpha_1 \# \alpha_2)$.

Der Beweis ist mit 1.2. und 1.7. trivial.

1.11. Satz. Aus $\varphi A \alpha \left(\begin{smallmatrix} \varphi B \beta \\ \varphi B' \beta' \end{smallmatrix} \right) \varphi A' \alpha'$ und $\varphi B' \beta' < \varphi B \beta$ folgt $\varphi A' \alpha' < \varphi A \alpha$, insbesondere also $\varphi A' \alpha' < \varphi A \alpha$.

Induktiver Beweis nach dem Aufbau von $\varphi A \alpha$ (mit 1.4., 1.6. und 1.7.).

1.12. Definition. $R(\varrho, \varphi A' \alpha', \varphi A \alpha)$ bedeute:

$\varrho \in \bar{T}_0$, $\varphi A' \alpha' \in \bar{T}_0$, $\varphi A \alpha \in \bar{T}_0$, $A' < A$ und $\alpha' = \alpha \# \varrho$.

1.13. Satz. Es sei $\varphi B \beta \sqsubset \varphi A \alpha \in \bar{T}_0$ und es gebe kein $\gamma \sqsubset \varphi A \alpha$ mit $\varphi B \beta \sqsubset \gamma$, $\varphi \gamma \gamma \sqsubset \varphi A \alpha$; weiter gelte $R(\varrho, \varphi B' \beta', \varphi B \beta)$ und $\varphi A \alpha \left(\begin{smallmatrix} \varphi B \beta \\ \varphi B' \beta' \end{smallmatrix} \right) \varphi A' \alpha'$. Dann gilt auch $R(\varrho, \varphi A' \alpha', \varphi A \alpha)$.

Induktiver Beweis nach dem Aufbau von $\varphi A \alpha$. Der Fall $\varphi A \alpha = \varphi \alpha \alpha$ kann dabei nach Voraussetzung nicht auftreten.

1.14. Satz. Aus $R(\varrho, \varphi A' \alpha', \varphi A \alpha)$ und $\varrho < \varphi A \alpha$ folgt $\varphi A' \alpha' < \varphi A \alpha$, insbesondere also $\varphi A' \alpha' < \varphi A \alpha$.

Dies folgt mit 1.4., 1.5. und 1.6.

1.15. Induktive Definition von $\bar{T}_0^0 \subset \bar{T}_0$.

1. $\varphi 0 0 \in \bar{T}_0^0$.

2. $\varphi A_i \alpha_i \in \bar{T}_0^0$, $i = 1, 2 \rightarrow \varphi(\psi_0(A_1 \# A_2))(\alpha_1 \# \alpha_2) \in \bar{T}_0^0$.

Es gilt: Ist $\varphi A\alpha \in \bar{T}_0^0$, $a \geq 0$ und $B \in T_0 \cup T_1$, so gilt $\alpha = 0$, $KA = \emptyset$ und $A < \psi_{a+1}B$.

1.16. Satz. Es sei $a \geq 0$, $\varphi A\alpha \in \bar{T}_0$ und $\varphi R0 \in \bar{T}_0^0$.

Dann gilt $\varphi(\psi_a(A \# R))\alpha < \varphi(\psi_{a+1}A)\alpha$.

Dies folgt mit 1.2., 1.4. und 1.6.

2. Es folgen einige z. T. sehr bekannte Tatsachen über Herleitungen.

2.1. Satz. Zu jeder Formel $\mathfrak{Q}[C, \neg C]$ gibt es eine Grundherleitung.

Zum Beweis vgl. [1] Satz 9.4.

2.2. Folgerung. Zu jeder Formel $\mathfrak{Q}[C, \neg C]$ gibt es eine Normalherleitung, die keine Schlüsse (S 3) vom Typ $\tau \neq 0$ und keine Schlüsse (S 5)–(S 8) enthält.

2.3. Satz. Reguläre Schlüsse sind die Einsetzungen $\mathfrak{F}[a^r] \vdash \mathfrak{F}[b^r]$ und $\mathfrak{F}[a^0] \vdash \mathfrak{F}[e^0]$, falls a^r nicht in $\mathfrak{F}$ auftritt.

Induktiver Beweis nach der Länge der Normalherleitung von $\mathfrak{F}[a^r]$.

2.4. Satz. Jede Normalherleitung $\mathfrak{H}$ einer Formel F läßt sich in eine strukturgleiche Normalherleitung von F umformen, die mit einer gegebenen Zeichenreihe verträglich ist.

Beweis durch Induktion nach der Länge von $\mathfrak{H}$.

2.5. Folgerung. Ist $\mathfrak{I}$ ein Schluß (S 2) oder (S 8) in einer Normalherleitung $\mathfrak{H}$ einer Formel F , so läßt sich $\mathfrak{H}$ so zu einer strukturgleichen Normalherleitung von F umformen, daß die Eigenvariable von $\mathfrak{I}$ unterhalb $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{H}$ nicht mehr auftritt.

Bemerkung. Die in 2.3., 2.4. und 2.5. beschriebenen Umformungen haben offensichtlich keinen Einfluß auf die Ordnung einer Herleitung.

2.6. Satz. Zu jeder Grundherleitung $\mathfrak{H}$ einer Formel $\mathfrak{P}[A]$ gibt es eine strukturgleiche Grundherleitung der Formel $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0[A]]$.

Zum Beweis vgl. [1] Satz 19.1.

2.7. Satz. Zu jeder Grundherleitung $\mathfrak{H}$ einer Formel $\mathfrak{Q}[A, A]$ gibt es eine Grundherleitung von $\mathfrak{Q}[A, \]$.

Zum Beweis vgl. [1] Satz 19.5.

2.8. Satz. Zu jeder Grundherleitung $\mathfrak{G}$ einer Formel $\mathfrak{F}[a^r]$ gibt es eine Grundherleitung von $\mathfrak{F}[e^r]$, falls a^r in $\mathfrak{F}$ nicht auftritt.

Beweis mit 2.1. durch Induktion nach der Länge von $\mathfrak{G}$.

2.9. Satz. $\mathfrak{G}$ sei eine Grundherleitung einer Formel $\mathfrak{F}[a^r]$, in der a^r in $\mathfrak{F}$ nicht auftritt. $\mathfrak{F}[a^r]$ enthalte Minimalteile $\mathfrak{F}_i[a^r] - a^r$ nicht in $\mathfrak{F}_i -$, $i = 1, \dots, n$, in deren Reduzierten $(\mathfrak{F}_i[a^r])^{red}$ kein positiver exponierter Prädikatenquantor auftritt. e^r sei ein Ausdruck vom Typ τ . Dann gibt es eine Normalherleitung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{F}[e^r]$, die keine Schlüsse (S 5)–(S 8) enthält und für die gilt: Bezeichnet $\mathfrak{f}_i$ den großen Formelbund des Positivteiles $\mathfrak{F}_i[e^r]$ in $\mathfrak{H}$, dann enthält $\mathfrak{f}_i$ nicht den Hauptteil eines Schlusses (S 3) vom Typ $\sigma \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Beweis mit 2.2. durch Induktion nach der Länge von $\mathfrak{G}$.

2.10. Satz. Jede schnittfreie Normalherleitung $\mathfrak{H}$ einer Formel F läßt sich in eine Grundherleitung umformen.

Beweis mit 2.1., 2.6., 2.7. und 2.8. durch Induktion nach der Länge von $\mathfrak{H}$.

2.11. Satz. $\mathfrak{H}$ sei eine Normalherleitung einer Formel $\mathfrak{Q}[C, C]$ für eine beliebige Formel C . Dann läßt sich $\mathfrak{H}$ in natürlicher Weise mit Schlüssen (S 7) zu einer Normalherleitung der Formel $\mathfrak{Q}[C,]$ erweitern.

2.12. Satz. $\mathfrak{H}$ sei eine Normalherleitung einer Formel $\mathfrak{Q}[A, B]$. Dann läßt sich $\mathfrak{H}$ in natürlicher Weise mit Schlüssen (S 6) und (S 7) zu einer Normalherleitung von $\mathfrak{G}[B, A]$ erweitern.

2.13. Satz. $\mathfrak{H}$ sei eine Normalherleitung einer Formel $\mathfrak{P}[\neg(A \vee B)]$. Dann erhält man in natürlicher Weise aus $\mathfrak{H}$ eine Normalherleitung $\mathfrak{H}^A$ bzw. $\mathfrak{H}^B$ von $\mathfrak{P}[\neg A]$ bzw. $\mathfrak{P}[\neg B]$.

2.14. Satz. $\mathfrak{H}$ sei eine Normalherleitung einer Formel $F \equiv \mathfrak{P}[\neg \vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]]$ der folgenden Gestalt: der kleine Formelbund $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{H}$ des genannten Positivteiles $\neg \vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]$ in F enthalte den Hauptteil eines Schlusses (S 2) mit der Eigenvariablen a^τ , den wir mit $\mathfrak{I}$ bezeichnen; unterhalb von $\mathfrak{I}$ enthalte $\mathfrak{H}$ keine Grundschlüsse. Dann gilt: Es gibt eine Normalherleitung $\mathfrak{H}'$ von $F' \equiv \mathfrak{P}[\neg \vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]] \vee \neg \mathfrak{A}[a^\tau]$.

Beweis durch Induktion nach der Anzahl m der Schlüsse unterhalb $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{H}$. Nach 2.5. können wir annehmen, daß a^τ unterhalb $\mathfrak{I}$ nicht als Eigenvariable auftritt.

1. $m = 0$. Dann erhält man aus der Normalherleitung der Prämisse von $\mathfrak{I}$ und einem Abschwächungsschluß eine Normalherleitung von $\mathfrak{P}[\neg \mathfrak{A}[a^\tau]] \vee \neg \vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]$. Mit einem Vertauschungsschluß nach 2.13. ergibt sich hieraus die Normalherleitung von $\mathfrak{P}[\neg \vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]] \vee \neg \mathfrak{A}[a^\tau]$.

Sei $m > 0$.

2. Ist F Konklusion eines Schnittes $\mathfrak{P}_1[C], \mathfrak{P}_2[\neg C] \vdash \mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Normalherleitung von $\mathfrak{P}_1[C] \vee \neg \mathfrak{A}[a^\tau]$ oder $\mathfrak{P}_2[\neg C] \vee \neg \mathfrak{A}[a^\tau]$. Mit der Normalherleitung von $\mathfrak{P}_2[\neg C]$ oder $\mathfrak{P}_1[C]$ und Vertauschungsschlüssen nach 2.12. ergibt sich dann die Normalherleitung von $(\mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]) \vee \neg \mathfrak{A}[a^\tau]$.

3. In allen anderen möglichen Fällen überträgt sich die Induktionsvoraussetzung ohne weiteres von der Prämisse auf die Konklusion.

2.15. Satz. $\mathfrak{H}$ sei eine Normalherleitung einer Formel $F \equiv \mathfrak{P}[\vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]]$ der folgenden Gestalt: Der kleine Formelbund $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{H}$ des genannten Positivteiles $\vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]$ in F enthalte den Hauptteil eines Schlusses (S 3) mit dem Eigenterm e^τ , den wir mit $\mathfrak{I}$ bezeichnen; unterhalb $\mathfrak{I}$ enthalte $\mathfrak{H}$ keine Grundschlüsse. Dann gibt es eine Normalherleitung $\mathfrak{H}'$ der Formel $F' \equiv \mathfrak{P}[\vee x^\tau \mathfrak{A}[x^\tau]] \vee \mathfrak{A}[\bar{e}^\tau]$. Dabei geht $\bar{e}^\tau$ aus e^τ durch eventuelle Einsetzungen hervor, so daß $\bar{e}^\tau = e^\tau$ ist, wenn $\tau = 0$ oder $\tau = 1$ ist oder wenn unterhalb $\mathfrak{I}$ keine Schlüsse (S 8) liegen.

Beweis durch Induktion nach der Anzahl m der Schlüsse unterhalb $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{H}$ analog zu 2.14.

2.16. Satz. $\mathfrak{H}$ sei eine Normalherleitung einer Formel

$$\mathfrak{P}[(e_1^{\tau_1}, \dots, e_m^{\tau_m} \in \lambda x_1^{\tau_1} \dots x_m^{\tau_m} \mathfrak{A}[x_1^{\tau_1}, \dots, x_m^{\tau_m}])]$$

bzw. $\mathfrak{P}[\neg(e_1^{\tau_1}, \dots, e_m^{\tau_m} \in \lambda x_1^{\tau_1} \dots x_m^{\tau_m} \mathfrak{A}[x_1^{\tau_1}, \dots, x_m^{\tau_m}])]$. Dann erhält man in natürlicher Weise aus $\mathfrak{H}$ eine Normalherleitung $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{P}[\mathfrak{A}[e_1^{\tau_1}, \dots, e_m^{\tau_m}]]$ bzw. $\mathfrak{P}[\neg \mathfrak{A}[e_1^{\tau_1}, \dots, e_m^{\tau_m}]]$.

2.17. Satz. Enthält das Endstück $\mathfrak{E}$ einer Normalherleitung $\mathfrak{H}$ keine Ausgangsformel von $\mathfrak{H}$ und sind alle Schnittformeln in $\mathfrak{E}$ Minimalteile, dann gibt es einen passenden Schnitt $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{E}$.

Beweis durch Induktion nach der Anzahl n der Schnitte im Endstück. (Nach Voraussetzung ist $n > 0$.)

$\mathfrak{I}_0$ sei ein Schnitt $\mathfrak{P}_1[C], \mathfrak{P}_2[\neg C] \vdash \mathfrak{P}_1[\] \vee \mathfrak{P}_2[\]$ in $\mathfrak{E}$, unter dem sich in $\mathfrak{E}$ kein weiterer Schnitt befindet. $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$, seien die in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Herleitungen von $\mathfrak{P}_1[C], \mathfrak{P}_2[\neg C]$. f_1 bzw. f_2 seien die kleinen Formelbünde von den Schnittteilen C bzw. $\neg C$ von $\mathfrak{I}_0$. Nach Definition enthält das Endstück $\mathfrak{E}_i$ von $\mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2$, genau dann eine Formel, die nicht zu $\mathfrak{E}$ gehört, wenn ein Teil von f_i Hauptteil eines Grundschlusses ist, der auf der Grenze von $\mathfrak{E}$ liegt. Wenn also $\mathfrak{I}_0$ nicht selbst passend ist, dann ist $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$, die beide $\mathfrak{I}_0$ nicht enthalten, in $\mathfrak{E}$ enthalten, so daß es nach Induktionsvoraussetzung in $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ einen passenden Schnitt $\mathfrak{I}$ gibt. Natürlich ist $\mathfrak{I}$ auch passend in $\mathfrak{E}$.

§ 3. Beweis des Hauptsatzes

Satz 1. Jede 2-isolierte einfache Normalherleitung einer Formel E läßt sich zu einer Grundherleitung von E umformen.

Satz 2. Jede 2-isolierte Normalherleitung einer Formel E läßt sich zu einer schnittfreien Normalherleitung von E umformen.

Offenbar ist Satz 1 eine unmittelbare Folgerung von Satz 2: Denn jede 2-isolierte einfache Normalherleitung ist natürlich auch eine 2-isolierte Normalherleitung, die sich nach Satz 2 in eine schnittfreie Normalherleitung umformen läßt. Nach § 2.2.10. läßt sich diese wiederum in eine Grundherleitung umformen.

Induktiver Beweis von Satz 2. Gegeben sei eine 2-isolierte Normalherleitung $\mathfrak{H}$ einer Endformel E , von der wir ohne Einschränkung annehmen, daß sie Schnitte enthält. σ sei die Ordnung von $\mathfrak{H}$. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, der Satz gelte für alle 2-isolierten Normalherleitungen der Ordnung $< \sigma$. Zum Beweis des Satzes genügt es daher, die gegebene Herleitung $\mathfrak{H}$ so zu einer 2-isolierten Normalherleitung $\mathfrak{H}'$ von E umzuformen, daß für σ' von $\mathfrak{H}'$ gilt: $\sigma' < \sigma$. Je nach Gestalt von $\mathfrak{H}$ hat man dazu die folgenden Fälle zu unterscheiden.

1. $\mathfrak{H}$ enthalte einen Schnitt $\mathfrak{I}$, dessen Schnittformel die Gestalt $\neg A$ oder $A \vee B$ hat.

1.1. $\mathfrak{I}$ sei von der Gestalt $\mathfrak{P}_1[\neg A], \mathfrak{P}_2[\neg \neg A] \vdash \mathfrak{P}_1[\] \vee \mathfrak{P}_2[\]$. Dann vertausche man in $\mathfrak{H}$ die Herleitungen der Prämissen von $\mathfrak{I}$ und ersetze $\mathfrak{I}$ durch einen Schnitt mit der Schnittformel A und einem Vertauschungsschluß nach § 2.2.12.: $\mathfrak{P}_2[\neg \neg A], \mathfrak{P}_1[\neg A] \vdash \mathfrak{P}_2[\] \vee \mathfrak{P}_1[\] \vdash \mathfrak{P}_1[\] \vee \mathfrak{P}_2[\]$. Die so entstandene Herleitung $\mathfrak{H}'$ der Endformel E ist natürlich wieder 2-isolierte Normalherleitung. Mit § 2.1.3., § 2.1.6. und § 2.1.11. erhält man für ihre Ordnung $\sigma' < \sigma$.

1.2. $\mathfrak{I}$ sei von der Gestalt $\mathfrak{P}_1[A \vee B], \mathfrak{P}_2[\neg (A \vee B)] \vdash \mathfrak{P}_1[\] \vee \mathfrak{P}_2[\]$. $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ seien die Herleitungen der Prämissen von $\mathfrak{I}$ mit den Ordnungen α_1, α_2 resp. in $\mathfrak{H}$. Die Konklusion von $\mathfrak{I}$ habe in $\mathfrak{H}$ die Ordnung α .

Nach § 2.2.13. bilden wir aus $\mathfrak{H}_2$ die Normalherleitung $\mathfrak{H}_2^A$ von $\mathfrak{P}_2[\neg A]$ bzw. $\mathfrak{H}_2^B$ von $\mathfrak{P}_2[\neg B]$. $\mathfrak{H}$ wird damit zu einer Herleitung $\mathfrak{H}'$ der Ordnung σ' umge-

formt, indem man in $\mathfrak{H}$ den Herleitungsteil der Konklusion von $\mathfrak{I}$ ersetzt durch die folgende Herleitung von $\mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$: $\mathfrak{H}_1$ von $(\alpha_1) \mathfrak{P}_1[A \vee B]$ und $\mathfrak{H}_2^B$ von $(\alpha_2^B) \mathfrak{P}_2[\neg B]$ ergeben mit einem Schnitt eine Herleitung von $\mathfrak{P}_1[A] \vee \mathfrak{P}_2[]$, die mit $\mathfrak{H}_2^A$ von $(\alpha_2^A) \mathfrak{P}_2[\neg A]$ und einem weiteren Schnitt zu $(\alpha') \mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$ führt. Die in Klammern beigefügten Ordinalzahlen bezeichnen dabei die Ordnung der betreffenden Formel in $\mathfrak{H}'$.

$\mathfrak{H}'$ ist wieder 2-isolierte Normalherleitung, da sich alle geforderten Eigenschaften ohne weiteres von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ übertragen. Weiter ergibt sich entweder $\alpha_2^{A,B} = \alpha_2$ oder $\alpha_2^{A,B} < \alpha_2$, letzteres mit § 2.1.7. und § 2.1.11. In beiden Fällen folgt nach § 2.1.8. $\alpha' < \alpha$. Wegen $\sigma\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right) \sigma'$ folgt nach § 2.1.11. $\sigma' < \sigma$.

2. Das Endstück von $\mathfrak{H}$ enthalte einen expliziten Grundschiuß.

$\mathfrak{I}$ sei ein expliziter Grundschiuß im Endstück von $\mathfrak{H}$, unter dem es in $\mathfrak{H}$ keinen (expliziten) Grundschiuß mehr gibt. Dann ist $\mathfrak{I}$ von der Gestalt $\mathfrak{P}[H_1], \mathfrak{P}[H_2] \vdash \mathfrak{P}[H]$ oder $\mathfrak{P}[H_1] \vdash \mathfrak{P}[H]$ und die Endformel E hat die Form $\mathfrak{P}_0[\bar{H}]$. Dabei ist H der Hauptteil von $\mathfrak{I}$ und $\bar{H}$ entsteht aus H durch Einsetzungen.

Ist $\mathfrak{I}$ ein Schluß (S 1) und $\bar{H}$ von der Gestalt $\neg(\bar{A} \vee \bar{B})$, dann bilden wir nach § 2.2.13. die 2-isolierte Normalherleitung $\mathfrak{H}^{\bar{A}}$ von $\mathfrak{P}_0[\neg \bar{A}]$ bzw. $\mathfrak{H}^{\bar{B}}$ von $\mathfrak{P}_0[\neg \bar{B}]$. Für deren Ordnung σ_1 bzw. σ_2 ergibt sich mit § 2.1.7. und § 2.1.11. $\sigma_i < \sigma$, $i = 1, 2$. Also gibt es nach Induktionsvoraussetzung schnittfreie Normalherleitungen von $\mathfrak{P}_0[\neg \bar{A}]$ bzw. $\mathfrak{P}_0[\neg \bar{B}]$, aus denen sich mit einem Schluß (S 1) die gewünschte schnittfreie Normalherleitung der Endformel $E \equiv \mathfrak{P}_0[\neg(\bar{A} \vee \bar{B})]$ ergibt.

Ist $\mathfrak{I}$ ein Schluß (S 2), (S 3) oder (S 4), dann bilden wir nach § 2.2.14., § 2.2.15. oder § 2.2.16. respektive die 2-isolierte Normalherleitung $\mathfrak{H}'$. Von ihr schließt man auf die gewünschte schnittfreie Normalherleitung der Endformel $E \equiv \mathfrak{P}_0[\bar{H}]$ analog wie oben im Falle (S 1).

3. Für alle folgenden Fälle können wir also nach 1. und 2. voraussetzen:

(V 1) Kein Schnitt in $\mathfrak{H}$ hat eine Schnittformel der Gestalt $\neg A$ oder $A \vee B$.

(V 2) Das Endstück von $\mathfrak{H}$ enthält keine (expliziten) Grundschlüsse.

Hier behandeln wir den Fall, daß das Endstück von $\mathfrak{H}$ eine Ausgangsformel von $\mathfrak{H}$, d. h. ein Axiom der Gestalt $\mathfrak{Q}[A, \neg A]$, enthält. $\mathfrak{I}$ sei der oberste Schnitt in dem Faden $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$, der $\mathfrak{Q}[A, \neg A]$ enthält.

3.1. $\mathfrak{N}$ enthalte die linke Prämisse von $\mathfrak{I}$. Dann seien $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ die Herleitungsteile der Prämissen $\mathfrak{P}_1[C], \mathfrak{P}_2[\neg C]$ von $\mathfrak{I}$ mit den Ordnungen α_1, α_2 resp. in $\mathfrak{H}$. α sei die Ordnung der Konklusion $\mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$ von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{f}$ sei der (kleine) Formelbund des Schnittteils C von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{H}$. Dann sind genau zwei Fälle möglich: Die genannten Teile A (und $\neg A$) in $\mathfrak{Q}[A, \neg A]$ sind fremd zu $\mathfrak{f}$ oder A ist Teil von $\mathfrak{f}$.

3.1.1. A sei fremd zu $\mathfrak{f}$. Dann erhält man durch Streichung eines jeden Teiles von $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{H}_1$, wobei aus $\mathfrak{Q}[A, \neg A]$ das Axiom $\mathfrak{Q}^*[A, \neg A]$ entstehe und Kürzungsschlüsse (S 7) eventuell in triviale Schlüsse übergehen, sonst jedoch der Her-

leitungszusammenhang in $\mathfrak{H}_1$ nicht geändert wird, und mit einem Abschwächungsschluß (S 6) eine Herleitung von $\mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$. Setzt man diese in $\mathfrak{H}$ an die Stelle des ursprünglichen Herleitungsteiles der Konklusion von $\mathfrak{I}$, so ergibt sich eine Herleitung $\mathfrak{H}'$ der Endformel E mit einer Ordnung σ' .

Natürlich ist $\mathfrak{H}'$ wieder 2-isolierte Normalherleitung. Mit $\alpha_1 < \alpha$ nach § 2.1.7. und $\sigma \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{smallmatrix} \right) \sigma'$ gilt nach § 2.1.11. $\sigma' < \sigma$.

3.1.2. A sei Teil von f . Dann ist $\mathfrak{P}_1[C]$ von der Gestalt $\mathfrak{Q}_1[C, \neg C]$, also $\mathfrak{P}_1[] \equiv \mathfrak{Q}_1[, \neg C]$. Man ersetzt in $\mathfrak{H}$ den Herleitungsteil der Konklusion von $\mathfrak{I}$ durch diejenige Herleitung von $\mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$, die sich zusammensetzt aus $\mathfrak{H}_2$, einem Schluß (S 6) $\mathfrak{P}_2[\neg C] \vdash \mathfrak{Q}_1[, \neg C] \vee \mathfrak{P}_2[\neg C]$ und einem Schluß (S 7) $\mathfrak{Q}_1[, \neg C] \vee \mathfrak{P}_2[\neg C] \vdash \mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$, und erhält so eine 2-isolierte Normalherleitung der Endformel E , für deren Ordnung σ' wie in 3.1.1. gilt: $\sigma' < \sigma$.

3.2. Der Fall, daß $\mathfrak{A}$ die rechte Prämisse von $\mathfrak{I}$ enthält, geht völlig analog zu 3.1.

4. Für den letzten Teil des Beweises können wir nunmehr außer den beiden Voraussetzungen (V 1) und (V 2) aus 3. von $\mathfrak{H}$ noch weiter annehmen:

(V 3) Das Endstück von $\mathfrak{H}$ enthält keine Ausgangsformel.

Dann gibt es nach § 2.2.17. einen passenden Schnitt $\mathfrak{I}$ im Endstück von $\mathfrak{H}$. Je nach Gestalt der Schnittformel von $\mathfrak{I}$ haben wir noch die drei folgenden Fälle zu unterscheiden:

4.1. $\mathfrak{I}$ habe die Gestalt $\mathfrak{P}_1[\vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]]$, $\mathfrak{P}_2[\neg \vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]] \vdash \mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$. Die Herleitungsteile der Prämissen von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{H}$ seien $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ mit den Ordnungen α_1 , α_2 resp. in $\mathfrak{H}$. Die Ordnung der Konklusion von $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{H}$ sei α . $\mathfrak{I}_1$ bzw. $\mathfrak{I}_2$ sei derjenige Schluß (S 3) bzw. (S 2) in $\mathfrak{H}$, der auf der Grenze des Endstücks von $\mathfrak{H}$ liegt und dessen Hauptteil zum kleinen Formelbund des linken bzw. rechten Schnittteiles von $\mathfrak{I}$ gehört. e^0 sei der Eigenausdruck von $\mathfrak{I}_1$, a^0 die Eigenvariable von $\mathfrak{I}_2$. Ohne Einschränkung können wir nach § 2.2.5. von $\mathfrak{H}$ annehmen, daß a^0 unterhalb $\mathfrak{I}_2$ in $\mathfrak{H}$ nicht mehr auftritt.

Aus $\mathfrak{H}_1$ bilden wir nach § 2.2.15. die Normalherleitung $\mathfrak{H}'_1$ von $\mathfrak{P}_1[\vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]] \vee \mathfrak{A}[e^0]$ und aus $\mathfrak{H}_2$ nach § 2.2.14. die Normalherleitung $\mathfrak{H}'_2$ von $\mathfrak{P}_2[\neg \vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]] \vee \neg \mathfrak{A}[a^0]$. Aus $\mathfrak{H}'_2$ ergibt sich mittels eines regulären Einsetzungsschlusses nach § 2.2.3. die Normalherleitung $\mathfrak{H}_3$ von $\mathfrak{P}_2[\neg \vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]] \vee \neg \mathfrak{A}[e^0]$.

Dann gelangt man zu einer Herleitung $\mathfrak{H}'$ der Endformel E mit einer Ordnung σ' , indem man den Herleitungsteil der Konklusion von $\mathfrak{I}$ durch die folgende Herleitung von $\mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$ ersetzt:

$\mathfrak{H}'_1$ von $(\alpha'_1) \mathfrak{P}_1[\vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]] \vee \mathfrak{A}[e^0]$ und $\mathfrak{H}_2$ von $(\alpha_2) \mathfrak{P}_2[\neg \vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]]$ ergeben mit einem Schnitt eine Herleitung von $\mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{A}[e^0] \vee \mathfrak{P}_2[]$. Ebenso ergeben $\mathfrak{H}_1$ von $(\alpha_1) \mathfrak{P}_1[\vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]]$ und $\mathfrak{H}_3$ von $(\alpha'_2) \mathfrak{P}_2[\neg \vee x^0 \mathfrak{A}[x^0]] \vee \neg \mathfrak{A}[e^0]$ mit einem Schnitt eine Herleitung von $\mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[] \vee \neg \mathfrak{A}[e^0]$. Aus beiden erhält man mit einem weiteren Schnitt eine Herleitung von $(\alpha') \mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[] \vee \mathfrak{P}_1[] \vee \mathfrak{P}_2[]$. Ein Kürzungsschluß nach § 2.2.11. führt schließlich zu $(\alpha') \mathfrak{P}_1[]$

Aus $\mathfrak{H}_2$ erhält man nach § 2.2.14. die Normalherleitung $\mathfrak{H}'_2$ von $\mathfrak{P}_4[\neg \vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$.

Man ersetzt nun in der Normalherleitung von F in $\mathfrak{H}$ die Normalherleitung $\mathfrak{H}_2$ durch $\mathfrak{H}'_2$ und jede Formel A zwischen $\mathfrak{I}$ und der Formel F (einschließlich) durch $A \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ und stellt den bei Schnitten hierdurch möglicherweise unterbrochenen Herleitungszusammenhang durch Einfügen von Vertauschungsschlüssen nach § 2.2.12. wieder her und erhält so eine Normalherleitung $\mathfrak{H}_3$ von $F \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$. Mit ihr und einem Schluß (S 8) $\mathfrak{I}_0$ ergibt sich dann die folgende Normalherleitung $\mathfrak{H}'$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}_1 \\
 \left. \begin{array}{l} \alpha \mathfrak{P}_1[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee \overline{\mathfrak{A}}[e^\tau] \\ \alpha_1 \mathfrak{P}_1[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma \mathfrak{P}_3[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \end{array} \right\} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}'_2 \\
 \left. \begin{array}{l} \delta' \mathfrak{P}_4[\neg \vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau] \\ \mathfrak{P}_3[] \vee \mathfrak{P}_4[] \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau] \end{array} \right\} \mathfrak{H}_3 \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}_1 \\
 \left. \begin{array}{l} \alpha \mathfrak{P}_1[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee \overline{\mathfrak{A}}[e^\tau] \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha'_1 \mathfrak{P}_1[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee F \end{array} \right\} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}_2 \\
 \left. \begin{array}{l} \varrho F \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau] \\ F \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[e^\tau] \end{array} \right\} \mathfrak{I}_0 \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}_1 \\
 \left. \begin{array}{l} \gamma' \mathfrak{P}_3[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee F \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu' \mathfrak{P}_3[] \vee F \vee \mathfrak{P}_4[] \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu' \mathfrak{P}_3[] \vee \mathfrak{P}_4[] \vee F \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Vertauschungsschluß} \\ \text{nach § 2.2.12.} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}_2 \\
 \left. \begin{array}{l} \delta \mathfrak{P}_4[\neg \vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \\ \vdots \\ \vdots \\ \nu' F \vee F \\ \vdots \\ \vdots \\ \nu' F \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Kürzungsschluß} \\ \text{nach § 2.2.11.} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\
 \sigma' E
 \end{array}$$

Wir haben zu zeigen: $\mathfrak{H}'$ ist 2-isolierte Normalherleitung mit $\sigma' < \sigma$.

1. Die Eigenschaft § 1.3.10.1. überträgt sich ohne weiteres von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$.

2. Wir zeigen § 1.3.10.2. für $\mathfrak{H}_0$: Ist M ein impliziter Minimalteil in $F \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ in $\mathfrak{H}'$, der fremd zum genannten Positivteil $\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ ist, so ist F in $\mathfrak{H}$ tatsächlich nicht die Endformel, sondern Prämisse eines Schlusses (S 8). Für M gilt dann § 1.3.10.2. nach Voraussetzung.

$\neg \vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]$ sei vom Quantorengrad 2. Ist $\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ ebenfalls vom Quantorengrad 2, so sind nach Definition der 2-isolierten Formeln alle exponierten Prädikatenquantoren 2. Grades in der Reduzierten $(\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau])^{red}$ von $\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ negativ; ist $\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ jedoch vom Quantorengrad 1, so liegt wieder nach Definition der 2-isolierten Formeln im Bereich eines exponierten Aussagen- oder Prädikatenquantors in $(\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau])^{red}$ keine freie Prädikatenvariable.

Ist $\neg \vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]$ jedoch vom Quantorengrad 1, so sind alle exponierten Aussagen- und Prädikatenquantoren in $(\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau])^{red}$ negativ.

Für alle übrigen Schlüsse (S 8) in $\mathfrak{H}'$ übertragen sich die in § 1.3.10.2. geforderten Eigenschaften unmittelbar aus $\mathfrak{H}$.

Also ist $\mathfrak{H}'$ eine 2-isolierte Normalherleitung. Bleibt zu zeigen: $\sigma' < \sigma$.

3. Wir zeigen $R(\varrho, \alpha'_1, \alpha_1)$ (siehe § 2.1.12.). Sei $a := g(\overline{\mathfrak{A}}[e^\tau])$. Mit $\alpha \equiv \varphi A \bar{\alpha}$ ist dann $\alpha'_1 = \varphi(\psi_a(A \# \varrho)) (\bar{\alpha} \# \varrho)$ und $\alpha_1 = \varphi(\psi_{a+1} A) \bar{\alpha}$. Mit $A < \psi_{a+1} A$ nach § 2.1.2. und $\varrho < \psi_{a+1} A$ nach § 1.4.4.5. folgt nach § 1.4.4.6. $\psi_a(A \# \varrho) < \psi_{a+1} A$.

4. Es gilt $\nu \binom{\alpha'_1}{\alpha_1} \nu'$ nach Konstruktion von $\mathfrak{H}'$. Da in dem vorliegenden Fall die Reduzierte der impliziten 2-isolierten Formel $\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]$ als äußerstes logisches Zeichen einen positiven Prädikatenquantor 2. Grades oder einen positiven Prädikatenquantor hat, in dessen Bereich eine freie Prädikatenvariable liegt, kann wegen § 1.3.10.2. zwischen $\mathfrak{H}_1$ und F in $\mathfrak{H}$ und also auch zwischen $\mathfrak{H}_0$ und F in $\mathfrak{H}'$ kein Schluß (S 8) liegen; also sind mit 3. die Voraussetzungen für § 2.1.13. gegeben. Danach gilt $R(\varrho, \nu', \nu)$.

5. Es gilt $\delta' < \delta$ wie in 4.1. und $\nu \binom{\delta}{\delta'} \varrho$ nach Konstruktion von $\mathfrak{H}_3$. Also folgt nach § 2.1.11. $\varrho < \nu$.

6. Nach § 2.1.14. folgt aus 4. und 5. nun $\nu' < \nu$. Wegen $\sigma \binom{\nu}{\nu'} \sigma'$ ergibt sich also wieder mit § 2.1.11. $\sigma' < \sigma$.

4.2.2. Die 2-isolierte Formel $\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]$ habe den Quantorengrad 1 und enthalte keine freie Prädikatenvariable.

Ersetzt man in $\mathfrak{H}$ den Herleitungsteil $\mathfrak{H}_2$ durch die Normalherleitung $\mathfrak{H}'_2$ von $\mathfrak{P}_4[\neg \vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau] \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ und jede Formel A unterhalb $\mathfrak{H}$ durch $A \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ und stellt den bei Schnitten hierdurch möglicherweise unterbrochenen Herleitungszusammenhang durch Einfügen von Vertauschungsschlüssen nach § 2.2.12. wieder her, so erhält man eine 2-isolierte Normalherleitung $\mathfrak{H}_3$ von $E \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$. Deren Ordnung sei σ_1 , und $\mathfrak{P}_4[\neg \vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau] \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ habe in $\mathfrak{H}_3$ die Ordnung δ' .

Es gilt $\delta' < \delta$ wie in 4.1. und $\sigma \left(\begin{smallmatrix} \delta \\ \delta' \end{smallmatrix} \right) \sigma_1$ nach Konstruktion von $\mathfrak{H}_3$. Also folgt nach § 2.1.11. $\sigma_1 < \sigma$. Also gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine schnittfreie Normalherleitung $\mathfrak{H}_4$ von $E \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$, von der wir nach § 2.2.10. ohne Einschränkung annehmen können, daß sie Grundherleitung ist. Da in der Reduzierten von $\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ nach Voraussetzung alle exponierten Aussagen- und Prädikatenquantoren negativ sind, sind für die Minimalteile in $\neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ in $E \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[a^\tau]$ in $\mathfrak{H}_4$ die Voraussetzungen von § 2.2.9. erfüllt. Danach gibt es eine Normalherleitung $\mathfrak{H}_0$ von $E \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[e^\tau]$, die keine Schlüsse (S 5)–(S 8) enthält und für die gilt: Der große Formelbund von $\neg \overline{\mathfrak{A}}[e^\tau]$ in $\mathfrak{H}_0$ enthält nicht den Hauptteil eines Schlusses (S 3) vom Typ $\sigma \neq 0$. Mit $\mathfrak{H}_0$ bilden wir die folgende Normalherleitung $\mathfrak{H}'$:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}_1 & & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}_0 \\
 \alpha \mathfrak{P}_1[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee \overline{\mathfrak{A}}[e^\tau] & & \varrho E \vee \neg \overline{\mathfrak{A}}[e^\tau] \\
 \alpha'_1 \mathfrak{P}_1[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee E & & \\
 & & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \mathfrak{H}_2 \\
 \mathfrak{P}_3[\vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \vee E & & \delta \mathfrak{P}_4[\neg \vee x^\tau \overline{\mathfrak{A}}[x^\tau]] \\
 \left. \begin{array}{c} \mu' \mathfrak{P}_3[\quad] \vee E \vee \mathfrak{P}_4[\quad] \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu' \mathfrak{P}_3[\quad] \vee \mathfrak{P}_4[\quad] \vee E \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Vertauschungsschluß} \\ \text{nach § 2.2.12.} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & & \\
 \sigma' E \vee E & & \\
 \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma' E \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Kürzungsschluß} \\ \text{nach § 2.2.11.} \end{array}
 \end{array}$$

Der Herleitungsteil $\mathfrak{H}_0$ in $\mathfrak{H}'$ enthält nach Konstruktion keine impliziten Schlüsse (S 3) vom Typ $\sigma \neq 0$ und keine Schlüsse (S 8). Also sind die Eigenschaften einer 2-isolierten Normalherleitung für den Teil $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}'$ trivial erfüllt und für den übrigen Teil von $\mathfrak{H}'$ übertragen sie sich ohne weiteres von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$.

Weiter gilt für die Ordnung ϱ von $\mathfrak{H}_0$ in $\mathfrak{H}'$ $\varrho \in \overline{T}_0$ (siehe § 2.1.15.). Also gilt nach § 2.1.16. $\alpha'_1 < \alpha_1$. Wegen $\sigma \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha'_1 \end{smallmatrix} \right) \sigma'$ folgt nach § 2.1.11. $\sigma' < \sigma$.

4.3. $\mathfrak{I}$ sei von der Gestalt $\mathfrak{P}_1[(e_1^{\tau_1}, \dots, e_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}[x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}])]$, $\mathfrak{P}_2[\neg (e_1^{\tau_1}, \dots, e_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n} \mathfrak{A}[x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}])] \vdash \mathfrak{P}_1[\quad] \vee \mathfrak{P}_2[\quad]$. In $\mathfrak{H}$ ersetze man die Herleitungen der Prämissen von $\mathfrak{I}$ durch die Herleitungen $\mathfrak{H}'_1$ von $\mathfrak{P}_1[\mathfrak{A}[e_1^{\tau_1}, \dots, e_n^{\tau_n}]]$ und $\mathfrak{H}'_2$ von $\mathfrak{P}_2[\neg \mathfrak{A}[e_1^{\tau_1}, \dots, e_n^{\tau_n}]]$ nach § 2.2.16. Die so entstandene Herleitung $\mathfrak{H}'$ der Endformel E ist natürlich wieder 2-isolierte Normal-

herleitung. Mit § 2.1.7., § 2.1.10. und § 2.1.11. erhält man für die Ordnung von $\mathfrak{S}'$ analog zu 4.1. $\sigma' < \sigma$.

Hiermit ist Satz 1 und Satz 2 vollständig bewiesen.

Anhang

Der Hauptsatz wurde in dieser Arbeit für 2-isolierte Normalherleitungen bewiesen. Diese Beschränkung gegenüber dem Ergebnis von [11] ermöglichte es, anstelle der ordinal diagrams von Takeuti das konstruktive Bezeichnungssystem $T_0 \cup T_1$ von Schütte, das auf Normalfunktionen beruht, zum Beweis zu verwenden. Mit dem takeutischen System $O(n)$ für beliebiges n (oder mit einer zu diesem äquivalenten Verallgemeinerung von $T_0 \cup T_1$) läßt sich der gegebene Beweis analog zum Beweis in [11] auf sogenannte n -isolierte Normalherleitungen (für beliebiges n) erweitern, die etwas allgemeiner sind als die in [11] betrachteten proof-figures of order n . Abschließend soll daher diese Klasse von Herleitungen noch definiert werden.

Eine Normalherleitung $\mathfrak{S}$ heißt n -isoliert, wenn folgendes gilt:

1. Der Hauptteil eines impliziten Schlusses (S 3) vom Typ $\tau \neq 0$ in $\mathfrak{S}$ ist eine n -isolierte Formel.

2. Jedem Schluß (S 8) $\mathfrak{I}$ ist eine ganze Zahl i , $2 \leq i \leq n^*$, der Index von $\mathfrak{I}$, zugeordnet.

3. Ist M ein beliebiger impliziter Minimalteil des Quantorengades q in der Prämisse eines beliebigen Schlusses (S 8) vom Index i und ist M n -isoliert, so gilt $i + q - 2 \leq n^*$.

Im Falle $q = n - i + 2$ sind alle exponierten Prädikatenquantoren vom Grad q in der Reduzierten A^{red} von A negativ.

4. Liegt in A^{red} im Bereich eines exponierten Prädikatenquantors eine freie Prädikatenvariable, dann ist dieser Quantor negativ in A^{red} und es ist $i = 2$.

Man sieht sofort, daß diese Definition für den Fall $n = 2$ mit der Definition der 2-isolierten Normalherleitung (§ 1.3.10.) übereinstimmt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Schütte, K.: Beweistheorie. Berlin, 1960.
- [2] — Syntactical and semantical properties of simple type theory. The J. of Symb. Logic **25** (1960), 305—326.
- [3] — Grundlagen der Analysis im Rahmen einer einfachen Typenlogik. Vorlesungsauszug, 1967 (unveröffentlicht).
- [4] — System $O(2)$ der Ordinaldiagramme von Takeuti. 1967 (unveröffentlicht).

* In [11] ist im Zusammenhang mit der hierzu analogen Stelle eine kleine Korrektur nötig. Denn dort wird in 4.2.1. j als der isolated degree von $\tilde{\mathfrak{F}}(\alpha)$ definiert und der Index i gleich 2 oder $n - j + 1$ gesetzt, was im letzteren Fall für $j = 0$ $i = n + 1$ ergibt. Dies widerspricht aber 2.5.2., wonach $i \leq n$ sein sollte.

Es bieten sich 2 Möglichkeiten an, dies zu beheben.

Man ersetze in 2.5.3. „ n “ durch „ $n - 1$ “, in 2.5.4. „ $n - j + 1$ “ durch „ $n - j$ “.

Die zweite Möglichkeit ergibt eine in den einzelnen Stufen (vgl. Einleitung) optimalere Ordinalzahlzuordnung: Man behandle den Fall $j = 0$ — analog wie in dieser Arbeit in § 3.4.2.2. geschehen — gesondert.

- [5] Takeuti, G.: On a generalized logic calculus. *Jap. J. Math.* **23** (1953), 39—96.
Errato to "On a generalized logic calculus". *Jap. J. Math.* **24** (1954), 149—156.
- [6] — On the fundamental conjecture of GLC I. *J. Math. Soc. Japan* **7** (1955), 249—275.
- [7] — On the fundamental conjecture of GLC II. *J. Math. Soc. Japan* **7** (1955), 394—408.
- [8] — On the fundamental conjecture of GLC III. *J. Math. Soc. Japan* **8** (1956), 54—64.
- [9] — On the fundamental conjecture of GLC IV. *J. Math. Soc. Japan* **8** (1956), 145—155.
- [10] — Ordinal diagrams. *J. Math. Soc. Japan* **9** (1957), 386—394.
- [11] — On the fundamental conjecture of GLC V. *J. Math. Soc. Japan* **10** (1958), 121—134.
- [12] — On the fundamental conjecture of GLC VI. *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 437—439.
- [13] — Consistency proofs of subsystems of classical analysis. *Ann. of Math.* **86** (1967), 299—348.

Lebenslauf

Ich wurde am 28. Oktober 1938 als Sohn von HANS BIBEL und seiner Ehefrau MARIE, geborene RIEGELBAUER, in Nürnberg geboren.

Von 1945 bis 1949 besuchte ich die Volksschule in Georgensgmünd und Nürnberg und war bis zur Reifeprüfung im Jahre 1958 Schüler am Realgymnasium in Nürnberg.

Ich studierte Mathematik und Physik an den Universitäten Erlangen, Heidelberg und München und bestand im Februar 1964 die Diplom-Hauptprüfung für Mathematik an der Universität München.

Bis April 1966 arbeitete ich bei Prof. Dr. P. MITTELSTAEDT zuerst als Stipendiat am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München, dann als wissenschaftlicher Assistent am Institut für theoretische Physik an der Universität zu Köln. Seit Mai 1966 bin ich bei Prof. Dr. K. SCHÜTTE als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München tätig.

In den höheren Semestern meines Studiums hörte ich Vorlesungen von F. BOPP, E. HEINZ, W. HEISENBERG, W. JEHNE, J. H. D. JENSEN, M. KNESER, M. KOECHER, P. MITTELSTAEDT, A. SCHLÜTER, K. SCHÜTTE, W. STEGMÜLLER, K. STEIN unter anderen.

